

malé kmity soustavy kolem stabilní rovnovážné konfigurace

Přiděl. Soustava s vsg. hru.

hruje rovnováhu měrnou oběžnou soustavou q_α a Lagr. fun.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q).$$

malé konfigurace $\dot{q}_\alpha$ je rovnovážná stabilní. Pak

$$U(q^0) = U_{\min}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right|_0 = 0$$

Při malých výchylkách

$$q_\alpha = q_\alpha^0 + \xi_\alpha$$

pleh Taylor rozvoj pot. energie

* [Mikrolev Korbekár: $U = x^4 + y^4$?
pak pot. rov. nelze linearizovat]

$$\begin{aligned} U(q) &= \underbrace{U(q^0)}_{\text{nožus volit} = 0} + \sum_\alpha \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \right)_0}_{=0} \xi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_0 \xi_\alpha \xi_\beta = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^0 \xi_\alpha \xi_\beta, \quad B_{\alpha\beta}^0 = \text{konstanty} \end{aligned}$$

Kinet. en.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} (\dot{q} + \dot{\xi}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{A_{\alpha\beta}(q^0)}_{\dot{A}_{\alpha\beta} = \text{konstanty}} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta$$

Se jme rovnici

$$\dot{q}_\alpha = \dot{\xi}_\alpha, \quad q_\alpha^0 = \text{konst.}$$

$$\text{Pak } \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (A_{\alpha\beta}^0 \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_\beta - B_{\alpha\beta}^0 \xi_\alpha \xi_\beta),$$

ke hrujícímu hru. naku

$$A_{\alpha\beta}^0 = A_{\beta\alpha}^0, \quad B_{\alpha\beta}^0 = B_{\beta\alpha}^0.$$

Lagr. rov.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_f} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_f} = 0, \quad f = 1, \dots, f = 3n-1$$

anži to

$$\sum_{\alpha=1}^f (A_{f\alpha}^0 \ddot{\xi}_\alpha + B_{f\alpha}^0 \xi_\alpha) = 0, \quad A \ddot{\xi} + B \xi = 0$$

Landau, Sup. V.
Hladík, 158 n
Goldstein

Nalezení normálních souřadnic pomocí metod lineární algebry.

Pohybové rovnice

$$\sum_{\alpha} A_{\gamma\alpha} \ddot{\xi}_{\alpha} + \sum_{\alpha} B_{\gamma\alpha} \xi_{\alpha} = 0$$

Klíčové metodou módů

$$\xi_{\alpha}(t) = X_{\alpha} \cos(\omega t + \varphi).$$

Rovnice pro amplitudy

$$\sum_{\alpha} (B_{\gamma\alpha} - \omega^2 A_{\gamma\alpha}) X_{\alpha} = 0$$

lze zapísat v maticové formě

$$(B - \omega^2 A) X = 0,$$

kde matice A, B jsou pozitivně definitní.

Přepíšeme do tvaru zobecněné úlohy na reálné vlastní čísla a vlastní vektory

$$\sum_{\beta} B_{\alpha\beta} X_{\beta} = \lambda \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} X_{\beta}$$

$$B X = \lambda A X, \quad \lambda = \omega^2$$

Jou-li $X^{(x)}$ vektory příslušné vlast. číslům λ_x , sestavené je do matice X s prvky

$$X_{\beta\gamma} = X_{\beta}^{(\gamma)}.$$

Zavedeme diag. matici Λ s prvky $\Lambda_{\epsilon\gamma} = \lambda_{\gamma} \delta_{\epsilon\gamma}$.

Pak lze rovnici

$$\sum_{\beta} B_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma} = \lambda_{\gamma} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} X_{\beta\gamma} = \sum_{\beta, \epsilon} A_{\alpha\beta} X_{\beta\epsilon} \Lambda_{\epsilon\gamma}$$

zapsat maticově

$$B X = A X \Lambda,$$

resp.

$$X^T B X = X^T A X \Lambda.$$

Matice A vyhovuje podmínkám kladeným
na definici A -skalárního součinu vektorů
 X, Y

$$(X, Y)_A = \sum_{\alpha, \beta} X_{\alpha} A_{\alpha\beta} Y_{\beta} = X^T A Y$$

[Pytlíček, str. 592-594].

Věta. Vlastní vektory příslušné různým vlastním
číslicím jsou A -ortogonální.

$$\boxed{D} \quad X^{(\varepsilon)T} / B X^{(\gamma)} = \lambda_{\gamma} A X^{(\gamma)}$$

$$X^{(\varepsilon)T} B^T = \lambda_{\varepsilon} X^{(\varepsilon)T} A^T \quad / \cdot X^{(\gamma)}$$

Po namnožením vynásobením rovnice odečteme

$$0 = X^{(\varepsilon)T} B X^{(\gamma)} - X^{(\varepsilon)T} B^T X^{(\gamma)} = (\lambda_{\gamma} - \lambda_{\varepsilon}) X^{(\varepsilon)T} A X^{(\gamma)};$$

(využili jsme symetrickosti A, B)

Je-li $\lambda_{\gamma} \neq \lambda_{\varepsilon}$, pak

$$X^{(\varepsilon)T} A X^{(\gamma)} = (X^{(\varepsilon)}, X^{(\gamma)})_A = 0. \quad \square$$

Normalizujeme-li vlastní vektory vzhledem
k A -skalárnímu součinu

$$(X^{(\varepsilon)}, X^{(\gamma)})_A = X^{(\varepsilon)T} A X^{(\gamma)} = \delta_{\varepsilon\gamma},$$

platí, že matice X je ortogonální,

$$\sum_{\alpha, \beta} X_{\alpha}^{(\varepsilon)} A_{\alpha\beta} X_{\beta}^{(\gamma)} = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} X_{\alpha\varepsilon} X_{\beta\gamma} = \delta_{\varepsilon\gamma},$$

$$X^T A X = E.$$

Dostali jsme tedy výsledek $X^T B X = E \Lambda = \Lambda,$

takže matice X diagonalizuje současně matice A, B .

Normální souřadnice η_k zavedeme
lineární transformací

$$\xi = X \eta.$$

Pak

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^T A \dot{\xi} - \xi^T B \xi) =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\eta}^T X^T A X \dot{\eta} - \eta^T X^T B X \eta) =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\eta}^T \dot{\eta} - \eta^T \Lambda \eta) = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{\eta}_k^2 - \omega_k^2 \eta_k^2)$$

$$\lambda_k = \omega_k^2$$

a pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = \ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0$$

odpovídají soustavě nezávislých harmonických
oscilátorů. $\eta_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$.

Pozn. Vlastní čísla $\lambda_\mu > 0$: píšeme pro první μ
a nenormalizovaný $X^{(\mu)}$

$$\sum_{\alpha} X_{\alpha\mu} \left(\sum_{\beta} B_{\alpha\beta} X_{\beta\mu} \right) = \lambda_{\mu} \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} X_{\beta\mu}$$

$$\sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} X_{\alpha\mu} X_{\beta\mu} = \lambda_{\mu} \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} X_{\alpha\mu} X_{\beta\mu}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\mu} = \frac{\sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} X_{\alpha\mu} X_{\beta\mu}}{\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} X_{\alpha\mu} X_{\beta\mu}} > 0$$