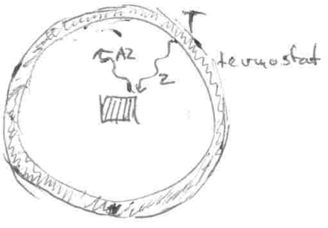
ZÁŘENÍ (ABSOLUTNĚ) ČERNÉHO TĚLESA

Kirchhoffův zákon záření



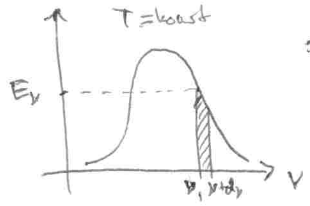
Z (záření) $= RZ + AZ$ (odrazí se a absorbuje)

E (emisní schopnost) ; $\frac{E}{A} = f(T)$ .. nezávisí na materiálu

(A.. bezrozměrové

E.. typu W/m^2s ~ něco jako hustota toku energie)

↳ zobecněně $\boxed{\frac{E_\nu}{A_\nu} = f(\nu, T)}$



$\Rightarrow E = \int_0^\infty E_\nu \, d\nu$ (při spojitě rozloženém spektru)

$f(\nu, T) = \frac{c}{8\pi} \underbrace{\rho(\nu, T)}_{[J/m^3 Hz]}$

$u = \int_0^\infty \rho(\nu, T)\, d\nu$ $[J/m^3]$ $= \langle w \rangle_{termT}$

spektrální hustota energie

Stefan-Boltzmann : $\boxed{u = \sigma T^4}$

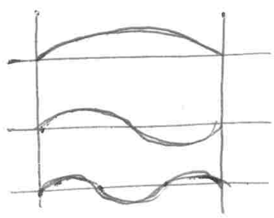
absolutně černé těleso $\Leftrightarrow A_\nu = 1$ pro $\forall \nu$ potom $E_\nu = f(\nu, T)$

EM pole : Maxwellovy rovnice

Stat. termodynamika : L. Boltzmann, J. W. Gibbs

(„Co takhle nahradit EM záření mechanickými harmonickými oscilátory a podrobit je statistické fyzice?")

Stojaté EM vlny jako soustava oscilátorů



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\psi(z,t) = X(z) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$X^{(m)}(z) = \sin k_m z$$

$$k_m = m\frac{\pi}{L} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin k_m z \underbrace{A_m \cos(\omega_m t + \varphi)}_{Q_m(t)}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\left[\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) \sin k_m z\right.$$

$$\sum_m \ddot{Q}_m(t) \sin k_m z = \sum_m v^2 Q_m(t)(-k_m^2) \sin k_m z$$

LN

$$\ddot{Q}_m + \underbrace{(v^2 k_m^2)}_{\omega_m^2} Q_m = 0$$

$$\mathcal{E} = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] dz =$$

$$= \frac{L}{2}\sum_m \left(\frac{1}{2}\rho \dot{Q}_m^2 + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\frac{T}{\rho} k_m^2}_{\omega_m^2} Q_m^2\right)$$

$* k_B = 1{,}380 \; E{-}23 \; J/K$

Ekvipartiční teorém : $\left\langle \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle_{termT} = \frac{1}{2} \overset{\text{pl. konst}}{k_B} T \quad / \cdot 3N_A$

$$U_{id. plynu} = \frac{3}{2} N_A k_B T = \frac{3}{2} RT$$

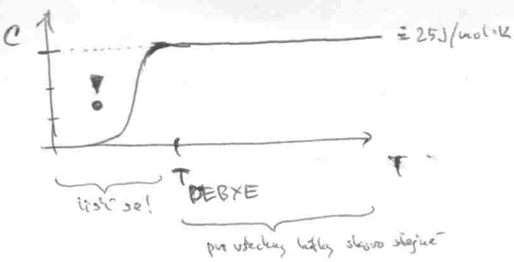
~ harmonický oscilátor :

$$\left\langle \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right\rangle_{term} = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T$$

(energie na každý stupeň volnosti)

Dulong-Petit : $U_{krystal} = 3N_A k_B T = 3RT$ $\qquad C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R$ (tepelná kapacita)

$(s = 3N_A)$



(přestane platit Dulong-Petitův zákon)

při fázový prostor $(q_1 .. q_3, p_1 .. p_3)$

$$\langle a_i p_i^2 \rangle_{term.} = \frac{\int_{\mathbb{R}^{2s}} a_i p_i^2 \, e^{\left(-\frac{1}{k_B T}\left(\sum a_j p_j^2 + U\right)\right)} d^s q \, d^s p}{\int_{\mathbb{R}^{2s}} e^{\left(-\frac{1}{k_B T}\left(\sum a_j p_j^2 + U\right)\right)} d^s p \, d^s q} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a_i p_i^2 \, e^{-\frac{a_i p_i^2}{k_B T}} dp_i}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a_i p_i^2}{k_B T}} dp_i} = \left[\begin{array}{l} \frac{a_i}{k_B T} = \alpha \\ p = x \end{array}\right] = \alpha k_B T \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx}$$

$$= \alpha k_B T \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{1}{2} k_B T$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \Rightarrow I_1^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-\alpha r^2} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du = 2\pi \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}\ \frac{dI_1}{dx} = I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\ldots}$$

$$\langle a_i p_i^2 + b_i q_i^2 \rangle_{\mathbb{R}^{2s}} = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T = \underline{k_B T} \quad (\nu)$$

<u>Planckův zákon</u> (spektrální hustota energie záření) $(\nu, \nu + d\nu)$

$$\boxed{\rho(\nu, T)\,d\nu = \frac{k\pi}{c^3} \underbrace{\frac{h\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)} - 1}}_{\text{modifikace ekvipartičního teorému}} \nu^2 d\nu}$$

$h = 6{,}67\,E{-}34$ J.s

$$\lambda = \frac{h\nu}{k_B T} \ll 1 \Rightarrow \frac{k_B T x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \to 0} k_B T \text{ (ekvip.)} \quad \left(\frac{e^x - 1}{x} \to 1\right)$$

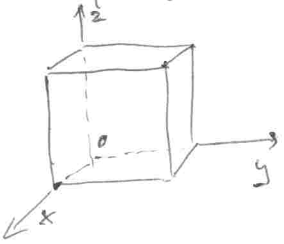
(tím došel změnu kapacity při nízkých teplotách)

ten zbytek vyjadřuje počet stojatých EM vln odpovídajících dané energii (podobně jako u lineárního krystalu → počet módů

↳

• EM pole ve vezonátoru : — u lineárního krystalu to bylo $\Psi(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin k_n z$

→ trojná Fourierova řada



$\vec{A}(\vec{r}, t) = 0$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

$E = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$A_x(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{n}} Q_{\vec{n}}(t)_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

(z vlastností EM pole vyplývá: $\underbrace{A_t = 0}_{\text{tečná složka}}$ $\underbrace{\frac{\partial A_n}{\partial n} = 0}_{\text{*„volný konec"}}$

— na rozhraní, kde pole za rozhraním je nulové)

$A_y(..) = \ldots \sin \cos \sin$

$A_z(..) = \ldots \sin \sin \cos$

* sin ~ pevný konec

cos ~ volný konec

$k_i = m_i \frac{\pi}{L}$ $\quad \vec{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

~ omezuje se mi to na jeden oktant – pro $m_i \geq 0$, ale tak, že $\sum |k_i| \neq 0$

$$\boxed{\omega_m = c\frac{\pi}{L}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}} \qquad \left(|\vec k| = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right)$$

(disperzní vztah pro EM vlny ve vakuu)

$$\Delta \vec A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec A}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\ddot{\vec Q}_{\vec m}(t) + \frac{\pi^2 m^2}{L^2}\vec Q_{\vec m}(t) = 0$$

[kmitá to ve směrech toho vektoru k ?]

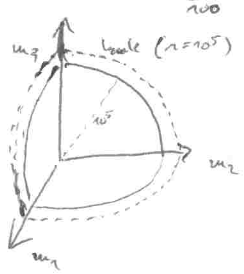
$\operatorname{div}\vec A = 0 \Rightarrow \vec Q_{\vec m}\cdot \vec m = 0 \Rightarrow$ 2 polarizační stavy

[Př] $L = 3\,\mathrm{cm} = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $\lambda = 600\,\mathrm{nm} \Rightarrow m = ?$

$\lambda\nu = c$, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\frac{\omega_m}{2\pi}} = \frac{c}{\frac{1}{2\pi}c\frac{\pi}{L}m} = \frac{2}{m}L$, $\quad m = 2\frac{L}{\lambda} = 2\frac{0{,}03}{6\cdot 10^{-7}} = 10^5$

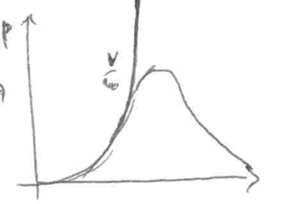
$(\nu, \nu+d\nu)$ $\quad (m, m+dm)$ $\quad$ ~ vezmu si velké rozměry (m) dodom m velké a kde jich velký počet

$\sim \frac{\nu}{100}$ $\quad \sim \frac{m}{100} = 10^3$



$$\underbrace{Z(\nu)d\nu}_{\text{asymptotický vzorec}} = \overset{\text{pol. stavy}}{2}\ \underbrace{\frac{4\pi m^2 dm}{8}}_{\text{objem sféry v 1 oktantu}} = 2\cdot\frac{4\pi}{8}\left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2\frac{2L}{c}d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu L^3$$

$\left(\omega_m = 2\pi\nu_m = c\frac{\pi}{L}m \Rightarrow m = 2\pi\frac{L}{c\pi}\nu_m\right)$



$\rho(\nu, T) = \text{konst}\, f(x) = \text{konst}\,\frac{x^3}{e^x - 1}$, $\quad f'(x_{max}) = 0$

$\Rightarrow x_{max} = 4{,}97 = \frac{h\nu}{k_B T} = \frac{hc}{\lambda_{max}k_B T}$ $\quad \boxed{\lambda_{max}T = 2{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K}}$ $\quad \cancel{E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = nh\nu}$

Wienův posunovací zákon

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = nh\nu$$

$\left(w_n = \frac{1}{Z}e^{\left(-\frac{nh\nu}{k_B T}\right)}\right.$, $<$

Planckovo odvození $(\nu, \nu+d\nu)$

1) připustíme hodnoty energie lin. osc. $n\varepsilon_0(\nu)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2) Boltzmannovo rozdělení $w_n = \frac{1}{z}e^{-\frac{n\varepsilon_0(\nu)}{k_B T}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$

3) term. střední energie $= \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0(\nu)w_n = \frac{1}{z}\sum n\varepsilon_0(\nu)e^{-\frac{n\varepsilon_0(\nu)}{k_B T}} = -\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial \beta} =$

$$= \frac{-(-1)(-\varepsilon_0(\nu))e^{-\beta\varepsilon_0(\nu)}}{(1-e^{-\beta\varepsilon_0(\nu)})^2} =$$

má normalizační faktor $z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left(-\frac{n\varepsilon_0(\nu)}{k_B T}\right)} = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}$, $\quad z = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon(\nu)}}$

$\to \frac{\varepsilon_0(\nu)}{e^{\beta\varepsilon_0(\nu)} - 1} \Rightarrow \underline{\varepsilon_0(\nu) = h\nu}$

Einsteinovo rozdělení

princip korespondence (Rayleigh-Jeans) $\rho_{RJ}(\nu,t) = \frac{8\pi}{c} k_B T \nu^2 d\nu$, $h\nu << k_B T$ $(\nu, \nu+d\nu)$

• atomy mají přípustné energie E_n

z hladiny $E_n \downarrow E_{n'}$ emise $E_n = E_{n'} + h\nu$

absorpce $E_{n'} + h\nu = E$

• princip detailní rovnováhy $dt \dots dN_{nn'} = dN$ (emise, absorpce)

pravděpodobnosti : $A_{nn'}$ = pravděpodobnost spontánní emise za 1 s

$\rho(\nu,T) B_{n'n}$ = absorbce za 1 s

$\rho(\nu,t) B_{nn'}$ = stimulované emise za 1 s

– potom $N_n (A_{nn'} + \rho(\nu,t) B_{nn'}) dt = N_{n'} \rho(\nu,t) B_{n'n}$

– Boltzmannovo rozdělení pro atomy $\omega_n = \frac{1}{Z} g_n e^{\wedge}\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$

T $\frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{\omega_n}{\omega_{n'}}$ dosazením → $\frac{\rho(\nu,t) B_{n'n}}{A_{nn'} + \rho(\nu,t) B_{nn'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} \cdot \frac{e^{\wedge}\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)}{e^{\wedge}\left(-\frac{E_{n'}}{k_B T}\right)} = \frac{g_n}{g_n} e^{\wedge}\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$

$$\Rightarrow \rho(\nu,T) = \frac{g_n A_{nn'}}{g_{n'} B_{n'n} e^{\wedge}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - g_n B_{nn'}}$$

vlastnosti : • při $T \to \infty$ platí $\rho \to \infty$

• princip korespondence :

1) $g_{n'} B_{n'n} = g_n B_{nn'}$

2) $h\nu << k_B T \Rightarrow \rho = \rho_{RJ}$

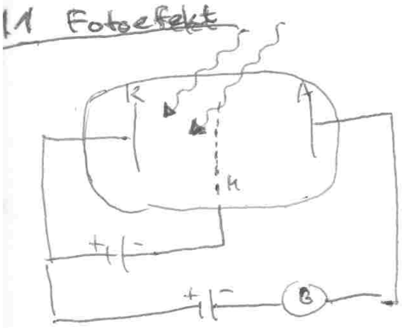
$$\rho = \frac{g_n A_{nn'}}{g_n B_{nn'}} \frac{1}{e^{\wedge}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \underset{\lim_{x\to 0} e^x = x}{=} \frac{A}{B} \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \frac{A}{B} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 d\nu$$

$$\Rightarrow \text{potom } \rho(\nu,T) = \frac{g_n A_{nn'}}{g_{n'} B_{n'n} e^{\wedge}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - g_n B_{nn'}} = \frac{g_n A_{nn'}}{g_n B_{nn} \left(e^{\wedge}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right)} = \boxed{\frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^2}$$

Debye $\omega_m = \frac{1}{Z} g_n e^{\wedge}\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$ (• Stefan-Boltzmannův zákon je důsledkem)

• Kirchhoff → Absolutně černé těleso (referenční zdroj ~ jen EM záření)
• modifikace ekvipartičního teorému (faktor Z ?)
• počet módů EM záření v 1 m³

11 Fotoefekt



Při určitém osvětlení se emitují elektrony z katody, a měří se jejich energie (tím, že je brzdí elektrické pole)

demonstrační proces je 1 elektron, 1 foton

$$\text{ZZE}: h\nu = \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{=eU} + A$$

(Einsteinova rovnice fotoefektu)

Vlny a částice

- rovinný (módy), kvanta mechanického oscilátoru : $E = nh\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$ ($n=0 \Rightarrow$ vakuum)
  (fotony ~ světlo, v pevných látkách → fonony - kvanta zvuku)

- fotoefekt (Lenard : slovenský rodák)
- Comptonův jev (USA)

} 1 foton + 1 elektron (dokazují poznatky nepravděpodobnosti)

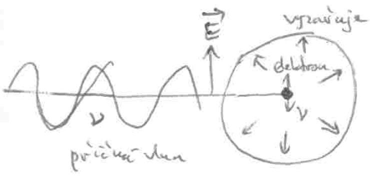
Fotoefekt :

$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$ (nerelativistickou energii můžeme použít, protože jde hlavně o viditelné světlo)

- $1\,\text{eV} = 1\,\text{C}\cdot 1\,\text{V} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\underbrace{\text{CV}}_{\text{J}}$
- $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ ($E = 1\,\text{eV} \rightsquigarrow \lambda = 1237\,\text{nm}$ ... nepřímá úměrnost)

– intenzita světla udává energii dopadajícího záření, je-li větší intenzita, dopadá víc fotonů a excituje se víc elektronů - jejich energie je ale dána pouze vlnovou délkou fotonů!

Comptonův jev : rozptyl fotonu na elektronu



- Thomsonův účinný průřez ($\sigma_t = \frac{8\pi}{3}r_0^2$, $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = m_0c^2$)

$\gamma_{\nu_0} + e^- = \gamma_\nu' + e^-$ (foton dopadne a zaniká, vyzáří se foton s nižší frekvencí - část energie si nechá ten elektron)

frekvence se změní, jestli $\frac{h\nu_0}{m_0c^2} \not\ll 1$

$m_0c^2 = \ldots = 0{,}5\,\text{MeV}$

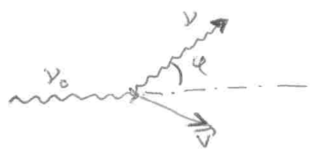
$h\nu_0 = 60 - 120\,\text{keV}$ (rentgenky)

kinematika (teorie relativity $\Rightarrow$ ZZE + ZZH)

- elektron může klidně být v pevné látce, protože energie fotonu jsou cca 100 eV a A (práce k průniku) je cca 3 eV

$$h\nu = m_0c^2 = h\nu + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \underbrace{\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m_0^2c^2}_{\text{tento vyhovuje ty lehkosti (vyloučím vychylost)}}, \quad \frac{h\nu}{c} = p, \quad m_0 = 0$$

$$\frac{h\nu_0}{c}\vec{s}_0 + 0 = \frac{h\nu}{c}\vec{s} + \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



$$\frac{1}{c^2}\left(h\nu_0 + m_0c^2 - h\nu\right)^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\vec{s}_0 - \frac{h\nu}{c}\vec{s}\right)^2 + m_0^2c^2$$

roznásobíme

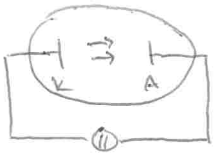
$$\frac{1}{\cancel{c^2}}\left(\cancel{h^2\nu_0^2} + \cancel{m_0^2c^4} + \cancel{h^2\nu^2} + 2h\nu_0 m_0c^2 - 2h\nu m_0c^2 - 2h\nu_0 h\nu\right) = \frac{1}{\cancel{c^2}}\Big(\cancel{h^2\nu_0^2} + \cancel{h^2\nu^2} - 2h\nu_0 h\nu \underbrace{(\vec{s}_0, \vec{s})}_{\cos\varphi}\Big) + \cancel{m_0^2c^2}$$

$$2m_0h(\nu_0 - \nu) = \frac{2h^2\nu_0\nu}{c}(1-\cos\varphi)$$

$$\nu_0 = \nu\left(1 + \frac{2h\nu_0}{m_0c^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\nu_0}{1 + 2\frac{h\nu_0}{m_0c^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

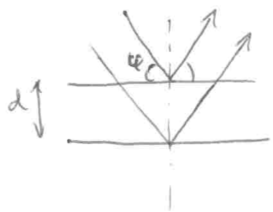
(Comptonův jev na jádrech (nukleony) ~~není~~ není, protože nukleony jsou moc těžké
(nižší energie : fotoefekt, vyšší : Comptonův jev, ještě vyšší : vytváření pozitronu)

• jakou energii mají fotony rentgenu?



zářeni má spojité spektrum a hrana toho spektra je u maxima té energie
můžeme použít princip optické mřížky $\sin\vartheta = \frac{\lambda}{d}$
(jako mřížka se dá použít krystalová mříž – prostorová)

Braggův-Vulfův vztah



$2d \cdot \sin\varphi = m\lambda$

foton: helicita – $\pm\hbar$
moment hybnosti

Difrakce rtg. záření na krystalech

(Interferenční jevy se týkají i samotné jediné částice – tím, že má ta částice na výběr 2 cesty)

Louis de Broglie:

foton: $\boxed{E = h\nu \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}}$

fyzikální optika → geometrická optika

? vlnová mechanika? → Hamiltonova mechanika

geometrická optika ⟷ Hamiltonova mechanika

$\omega = \frac{\partial\psi}{\partial t}$ ⟷ $E - \frac{\partial S}{\partial t}$

$\vec{k} = \nabla\psi$ ⟷ $\vec{p} = \nabla S$

$E = \hbar\omega$

$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k$

(přepočet)

– rovinné monochromatické vlny (de Broglieovy vlny)

$$\boxed{\psi(\vec{r},t) = Ae^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})}}$$

(štěstí vln – nepoužívá se)

$$P(\Omega,t) = \int_\Omega |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = \int_{R^3} |\psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1$$

(pravděpodobnost nalezení částice v prostoru – je všude – ?, nelze normalizovat)

– disperzní vztah: $\omega = \omega(k)$; $E = E(\vec{p})$; $E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2c^2}$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \; ; \; E = m_0^2c^2 + c^2\vec{p}^2$$

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{c\,2p}{2\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}} = \frac{cP}{\frac{E}{c}} = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{\ }}c\right) \Big/ \left(\frac{mc^2}{c\sqrt{\ }}\right) = v$$

alespoň grupová rychlost odpovídá pohybu částice (je menší, než fázová a je stejná, jako rychlost částice)

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \qquad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)(-i\hbar\nabla)\psi + U\psi$$

(stejný postup, jako při hledání rovnice pro plazma)

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi}$$

Schrödingerova rovnice

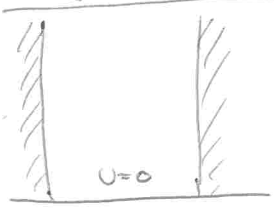
• stacionární stavy $E = konst$

$$\psi_E(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi_0(\vec{r}) \qquad \boxed{E_n = \frac{konst}{n^2}}$$

(při řešení fyzikální úlohy našel spektrum, které je současně spojité a diskrétní)

• $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = eU + A$ (fotoefekt)

• energie módů elektronu na omezené délce



0 L

$\psi(0,t) = 0 = \psi(L,t)$

Schrödinger: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$

$[\psi(z,t) = T(t)\psi_0(z)]$

$i\hbar T'\psi_0 = -\frac{\hbar}{2m}T\psi_0''$ (separace)

$i\hbar\frac{T'}{T}(t) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\psi_0''}{\psi_0}(z) = E$

$\Rightarrow (\ln T)' = \frac{T'}{T} = \frac{i}{\hbar}E$; $\ln T = -\frac{i}{\hbar}Et + \ln A \Rightarrow T = Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

a pro $\psi_0(z)$ platí: $+\frac{\hbar^2}{2m}\psi_0'' + E\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_0'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_0 = 0$

+ ! u uchovává je něco jiného než u dole $\Rightarrow$ [4]

$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\quad \underbrace{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}}$ $\quad \hbar k = \sqrt{2mE}$

$\Rightarrow$ hladiny (módy): $\psi_n(z) = \sin k_n z \quad [k_n = n\frac{\pi}{L}$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}} = \boxed{n^2\frac{h^2}{8mL^2}}$$

[jinak: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $\lambda_n = \frac{h}{mv_n}$ (De Broglie) $\Rightarrow v_n = \frac{h}{2mL}n$; $E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$]

Zeemanův jev

Lorentz (vysvětlení) $m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} + e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$
$\vec{B} = (0,0,B)$

$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x - e\dot{y}B = 0$
$m\ddot{y} + m\omega_0^2 y - e\dot{x}B = 0$
$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z + 0 = 0$

vlna je lineárně polarizovaná

dipól rotuje kolem středu ! ve směru osy vyzařuje kruhově polarizované světlo a ve směru dalších dvou kolmých os lineárně polarizované (v rovině rotace)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

$$\left.\begin{aligned}(-\omega^2+\omega_0^2)X - i\omega\frac{eB}{m}Y = 0\\ i\omega\frac{eB}{m}X + (-\omega^2+\omega_0^2)Y = 0\end{aligned}\right\}\ \det = \omega^4 - \omega^2\left(2\omega_0^2 + \frac{e^2B^2}{m^2}\right) + \omega_0^4 = 0$$

zanedb. členy $\sim B^2$ $\quad \omega_{1,2}^2 \doteq \omega_0^2 \pm \omega_0\frac{eB}{m}$; $\underline{\omega_{1,2} \doteq \omega_0 \pm \frac{1}{2}\omega_0\frac{eB}{m}}$

(př: kolik by musela být vysoká mřížka, aby byly rozlišitelné spektrální čáry...)

Př: elektronový mikroskop: elektrony $\rightarrow$ 100 kV, jaká je De Broglieho λ?

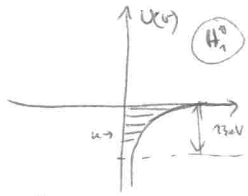
- $\lambda = \frac{h}{p}$ $\quad E = 100\,\mathrm{keV} = \frac{p^2}{2m}$; $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \dots = 5\cdot10^{-12}\,\mathrm{m}$ (jako RTG) $\leftarrow$ nerelativistická aprox.
- ! $U = 100\,\mathrm{GeV} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \doteq cp \Rightarrow p = \frac{E}{c} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = 1{,}24\cdot10^{-17}\,\mathrm{m}$ (v urychlovači) $\leftarrow$ ultrarelativistická aprox. (relativisticky)

Bohrův model atomu

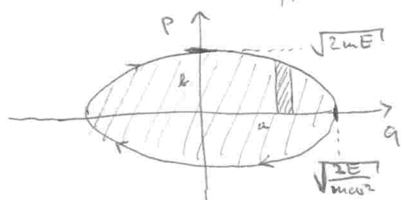
I. atom má spočetnou množinu energetických hladin (diskrétní spektrum)

II. procesy emise / absorbce fotonu $\rightarrow E_n = E_m + h\nu$; $E_m + h\nu = E_n$

$E_n = \frac{Rhc}{n^2}$



Bohr, Sommerfeld: $\boxed{\oint p\,dq = nh}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

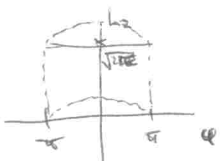


dk: • harmonický oscilátor: $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (\omega = 2\pi\nu)$

$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$

$\oint p\,dq = \pi a b = \pi\sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}}\cdot\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\omega}E = nh \quad E_n = nh\nu$

• tuhý rotátor: $L = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$; $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = I\dot{\varphi} \Rightarrow E = \frac{p_\varphi^2}{2I} = \frac{L_z^2}{2I}$



• matematické kyvadlo: $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mg\overbrace{(1-\cos\varphi)l}^{h}$ $\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$

$\oint p\,dq = \int_{-\pi}^{\pi} L_z\,d\varphi = 2\pi L_z = nh \quad \boxed{L_z = n\hbar}$

! problém 3 těles už se nedá převést na takovýto integrál (třeba atom Helia)

Spektrum atomu vodíku : 1885 Balmerův vzorec : $\lambda = \lambda_\infty \frac{n^2}{n^2-4}$ $(n \in \mathbb{N}, > 2)$

$\left(\frac{4}{R} = \lambda_0\right)$

Rydbergův vzorec : $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $(n > m)$ [pro $m=2 \Rightarrow$ Balmer]

$R = 10967758\ m^{-1}$

Bohrův vzorec : $h\nu = E_n - E_m = Rhc\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)$

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\right)^2 \frac{m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (m_e \text{ - hmotnost } e^-) \quad = -\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2}}, \quad \alpha = \frac{1}{137} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$

konstanta jemné struktury

stavy atomu vodíku – závisí na n, l, m, m_s

n – určuje E

$l \in \widehat{n-1} \cup \{0\}$ – určuje $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$

m – určuje $L_z = m\hbar$ $\quad m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$

$m_s = \pm\frac{1}{2} \rightarrow S_z = \pm\frac{\hbar}{2}$ (vlastní moment hybnosti) ... spin

$$2\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2n^2 \qquad \left(m_n = \frac{q_n e}{2} \ ?\right)$$

atom v magnetickém poli $\vec{B} = (0,0,B)$ $\quad \Delta E = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -\frac{e\hbar}{2m_e}Bm$

Larmorova věta : $\vec{L} = \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$ (moment hybnosti je součet momentů hybnosti částic)

$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum q_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha$ ... platí-li $\frac{q_\alpha}{m_\alpha} = konst \left(= \frac{e}{m}\right)$ pro $\forall \alpha$

$\quad = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\vec{L}$

$\Rightarrow$ platí přímá úměrnost $\vec{L}$ a $\vec{m}$